

# Formelsammlung Technische Mechanik

© 2000 by Michael Göller

## 1. Allgemeines

(1)  $1 \text{ Newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(2) 1 kg Masse wiegt auf der Erdoberfläche 9,81 N

(3)  $F = m_F \cdot l_F$

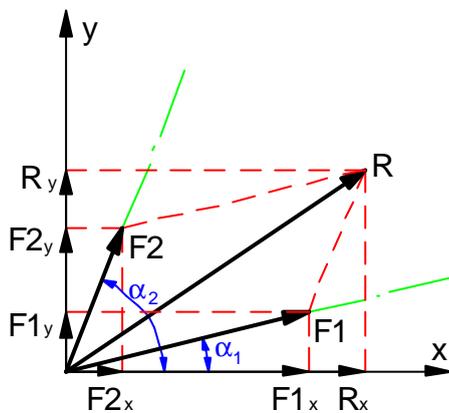
Kennzeichnung der Kraft

(4)  $F = q \cdot l$

Streckenlast (q: Kraft / Länge)

(5)  $F = \sigma \cdot A = p \cdot A$

Flächenlast ( $\sigma, p$ : Kraft / Fläche)



Rechnerische Zerlegung einer Kraft in 2 Komponenten mit gegebenen Wirkungslinien.

$R_x$  und  $R_y$  (Resultierende) müssen mit dem zugehörigen Vorzeichen eingesetzt werden.

(6.1)  $F_{2x} = \frac{R_y - R_x \cdot \tan \alpha_1}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}$

(6.3)  $F_{1x} = \frac{-R_y + R_x \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}$

(6.2)  $F_{2y} = \frac{R_y - R_x \cdot \tan \alpha_1}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} \cdot \tan \alpha_2$

(6.4)  $F_{1y} = \frac{-R_y + R_x \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} \cdot \tan \alpha_1$

(7)  $\vec{F} = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k$

Addition räumlicher Kräfte

(7.1)  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$

(8)  $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$   
 $= (F_{1x} + F_{2x}) \cdot i + (F_{1y} + F_{2y}) \cdot j + (F_{1z} + F_{2z}) \cdot k$

Resultierende Kraft

(8.1)  $R_x = F_{1x} + F_{2x} = \Sigma F_x$   
 $R_y = F_{1y} + F_{2y} = \Sigma F_y$   
 $R_z = F_{1z} + F_{2z} = \Sigma F_z$

Beträge

(9)  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

Betrag des Kraftvektors

(9.1)  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

Betrag im Ebenen System

## 2. Statik

### 2.1 Kräfte am starren Körper

(10)  $\Sigma \vec{F}_n = \vec{R}$  Addition nichtparalleler Kräfte

(10.1)  $\Sigma F_x = R_x$  Beträge

$\Sigma F_y = R_y$

$\Sigma F_z = R_z$

(11)  $\Sigma \vec{F}_n = \vec{0}$  Kräftegleichgewicht

(11.1)  $\Sigma F_x = 0$  Beträge

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma F_z = 0$

### 2.2 Momente am starren Körper

(12)  $M_p = F \cdot s$  Moment am starren Körper

(13)  $\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}_1$  vektoriell allgemein

(14)  $M = s \cdot F = a \cdot F = \sin \alpha$  Betrag

(14.1)  $\vec{a} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

(14.2)  $\vec{a} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$  nach Sarrus berechnen

(14.3)  $= + a_y F_z i + a_z F_x j + a_x F_y k - a_z F_y i - a_x F_z j - a_y F_x k$

(14.4)  $= + (a_y \cdot F_z - a_z \cdot F_y) \cdot i$   
 $+ (a_z \cdot F_x - a_x \cdot F_z) \cdot j$   
 $+ (a_x \cdot F_y - a_y \cdot F_x) \cdot k$

(15) Bei der Parallelverschiebung einer Kraft  $F$  um  $s$ , muß ein Moment eingeführt werden, das dem Moment  $M = s \cdot F$  der unverschobenen Kraft bezüglich der neuen Wirkungslinie entspricht.

(16)  $\vec{M}_p = \vec{r} \times \vec{F}$  Das statische Moment einer Kraft

(16.1)  $M_p = r \cdot F \cdot \sin \alpha$  Betrag

(17)  $M = (x_1 - x_p) \cdot F \cdot \cos \alpha - (y_1 - y_p) \cdot F \cdot \sin \alpha = F_y \cdot (x_1 - x_p) - F_x \cdot (y_1 - y_p)$

(17.1) Umgekehrt gilt daher: Die Summe der statischen Momente mehrerer Kräfte ist gleich dem statischen Moment ihrer Resultierenden.  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

(17.2) Die Summe der statischen Momente mehrere Kräfte bzgl. eines Punktes der Wirkungslinie ihrer Resultierenden ist = 0.  $\vec{M} = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$

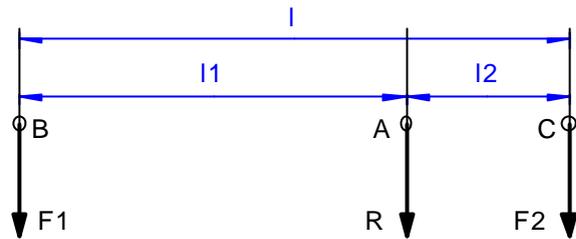
### Addition parallel gerichteter Kräfte

$$(18.1) \quad R = F_2 \cdot \frac{l}{l_1} \quad (\text{Bezugspunkt B})$$

$$(18.2) \quad l_1 = l \cdot \frac{F_2}{F_1 + F_2}$$

$$(18.3) \quad R = F_1 \cdot \frac{l}{l_2} \quad (\text{Bezugspunkt C})$$

$$(18.4) \quad l_2 = l \cdot \frac{F_1}{F_1 + F_2}$$



## 2.3 Das Gleichgewicht am starren Körper

### Ebenes System

$$(19) \quad \Sigma \vec{F}_i = \vec{0} : \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0} \quad \text{Vektoren}$$

$$(20.1) \quad \Sigma F_{ix} = \Sigma x = 0 : F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \quad \text{Beträge}$$

$$(20.2) \quad \Sigma F_{iy} = \Sigma y = 0 : F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0$$

$$(21) \quad \vec{M}_i^* = M_i \cdot \vec{k} \quad \text{Freie Momente}$$

$$(22) \quad \vec{M}_i = (r_{ix} \cdot F_{iy} - r_{iy} \cdot F_{ix}) \cdot \vec{k}$$

$$(23) \quad \Sigma \vec{M} = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \Sigma \vec{M}_i^* = \vec{0} \quad \text{Vektoren}$$

$$(23.1) \quad \Sigma M = \Sigma (r_{ix} \cdot F_{iy} - r_{iy} \cdot F_{ix}) + \Sigma M_i^* = 0 \quad \text{Beträge}$$

Bemerkung:

Definiton des Gleichgewichts: Entweder durch 2 Vektorgleichungen (19 und 23) oder durch 3 Betragsgleichungen (20.1; 20.2 und 23.1).

### Räumliches System

$$(24) \quad \Sigma \vec{F}_i = \vec{0} : \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0} \quad \text{Vektoren}$$

$$(24.1) \quad \Sigma F_{ix} = \Sigma x = 0 : F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \quad \text{Beträge}$$

$$(24.2) \quad \Sigma F_{iy} = \Sigma y = 0 : F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0$$

$$(24.3) \quad \Sigma F_{iz} = \Sigma z = 0 : F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0$$

(Vorzeichen beachten !)

$$(25) \quad \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ r_{ix} & r_{iy} \\ F_{ix} & F_{iy} \end{vmatrix} \quad \text{Momente der Kräfte}$$

$$(25.1) \quad \vec{M}_i^* = M_{ix} \cdot \vec{i} + M_{iy} \cdot \vec{j} + M_{iz} \cdot \vec{k} \quad \text{Freie Momente}$$

$$(26) \quad \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \Sigma \vec{M}_i^* = \vec{0} \quad \text{Vektoren}$$

$$(26.1) \quad \Sigma M_x = 0 : \Sigma (r_{iy} \cdot F_{iz} - r_{iz} \cdot F_{iy}) + \Sigma M_{ix}^* = 0 \quad \text{Beträge}$$

$$(26.2) \quad \Sigma M_y = 0 : \Sigma (r_{iz} \cdot F_{ix} - r_{ix} \cdot F_{iz}) + \Sigma M_{iy}^* = 0$$

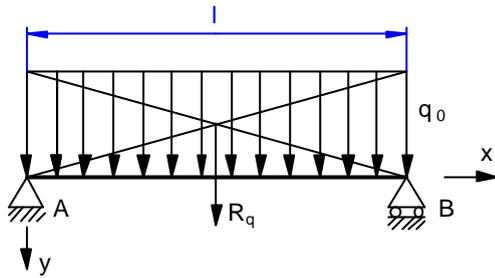
$$(26.3) \quad \Sigma M_z = 0 : \Sigma (r_{ix} \cdot F_{iy} - r_{iy} \cdot F_{ix}) + \Sigma M_{iz}^* = 0$$

Bemerkung:

Das Gleichgewicht im räumlichen System ist definiert, entweder durch 2 Vektorgleichungen (24 und 26) oder durch sechs Betragsgleichungen (24.1-3; 25.1-3).

## 2.4 Statik des Balkens

Konstante Streckenlast über die ganze Balkenlänge (siehe 230.4 / 230.5)



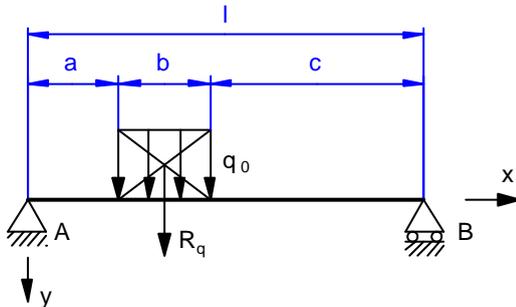
$$(31.1) \quad M(x) = \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) = \frac{R_q \cdot l}{2} \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (\text{Parabel})$$

Biegemoment an der Stelle x

$$(31.2) \quad Q(x) = q_0 \cdot l \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{Gerade})$$

Querkraft an der Stelle x

Kontinuierliche Streckenlast auf Teillänge des Balkens



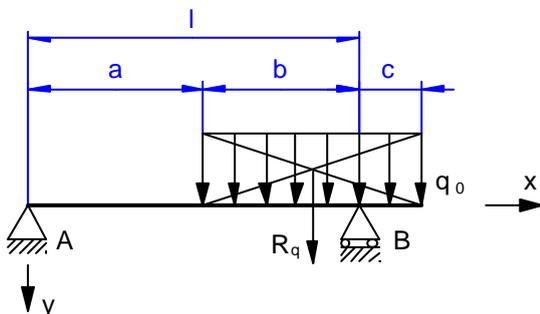
$$(32.1) \quad M(x) = A \cdot x - q_0 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + q_0 \cdot \frac{(x-a-b)^2}{2}$$

Biegemoment

$$(32.2) \quad Q(x) = -A + q_0 \cdot (x-a) - q_0 \cdot (x-a-b)$$

Querkraft

Konstante, übertragende Streckenlast



$$(33.1) \quad M(x) = \underbrace{A \cdot x}_{\text{Bereich\_a}} - \underbrace{q_0 \cdot (x-a) \cdot \frac{x-a}{2}}_{\text{Bereich\_b}} = \underbrace{A \cdot x - q_0 \cdot (x-a) \cdot \frac{x-a}{2} + B \cdot (x-a-b)}_{\text{Bereich\_c}}$$

$$(33.2) \quad Q(x) = -A = -A + q_0 \cdot (x-a) = -A + q_0 \cdot (x-a) - B \quad \text{Querkraft}$$

### 3. Schwerkraft und Schwerpunkt

#### 3.1 Massenpunkt und Schwerpunkt

$$(60) \quad G = m \cdot g$$

Gewicht = Masse · Erdbeschleunigung

$$(60.1) \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Fallbeschleunigung

$$(60.2) \quad 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Einheit

#### 3.2 Der Schwerpunkt

$$(61) \quad \vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{G}_i = \vec{r}_0 \times \vec{G}$$

$$(61.1) \quad \vec{r}_0 \times \vec{G} = 0 = \sum \vec{r}_i \times \vec{G}_i$$

$$(62) \quad \vec{r}_0 = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{m} = \sum \frac{m_i}{m} \cdot \vec{r}_i$$

$$(63) \quad x_0 = \sum \frac{m_i}{m} x_i \quad y_0 = \sum \frac{m_i}{m} y_i \quad z_0 = \sum \frac{m_i}{m} z_i$$

$$(64) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

#### 3.3 Ermittlung von Schwerpunkten

$$(65) \quad \sum \frac{V_i}{V} \cdot \vec{r}_i = \vec{r}_0$$

*Schwerpunkte von Linien*

$$(66) \quad x_0 = \sum \frac{\Delta l_i}{l} \cdot x_i \quad y_0 = \sum \frac{\Delta l_i}{l} \cdot y_i \quad z_0 = \sum \frac{\Delta l_i}{l} \cdot z_i$$

$$(66.1) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{l_2}{l_1} \quad \text{gebrochener Linienzug}$$

$$(66.2) \quad x_0 = \frac{l_1 \cdot x_1}{l_1 + l_2} + \frac{l_2 \cdot x_2}{l_1 + l_2} = \frac{l_1 \cdot x_1}{l} + \frac{l_2 \cdot x_2}{l}$$

$$y_0 = \frac{l_1 \cdot y_1}{l_1 + l_2} + \frac{l_2 \cdot y_2}{l_1 + l_2} = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2}{l}$$

$$(67.1) \quad y_0 = \frac{r}{b} \cdot s \quad ; \quad x_0 = 0 \quad (b = \text{Bogenlänge}, s = \text{Sehnenlänge}) \quad \text{Kreisbogen}$$

$$(67.2) \quad y_0 = \frac{s}{\pi} \cdot \frac{90^\circ}{\alpha^\circ} \quad ; \quad x_0 = 0$$

$$(67.3) \quad y_0 = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha} \quad ; \quad x_0 = 0$$

$$(67.4) \quad y_0 = \frac{2r}{\pi} \quad ; \quad x_0 = 0 \quad \text{Halbkreisbogen}$$

$$(67.5) \quad x_0 = \frac{2r}{\pi} = y_0 \quad \text{Viertelkreisbogen}$$

*Schwerpunkte von ebenen Flächen*

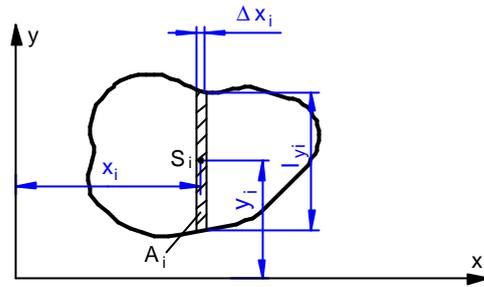
$$(68) \quad x_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot x_i \quad \text{allgemein}$$

$$y_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot y_i$$

1. Möglichkeit

$$(68.1) \quad x_0 = \sum \frac{\Delta x_i \cdot I_{y_i}}{A} \cdot x_i$$

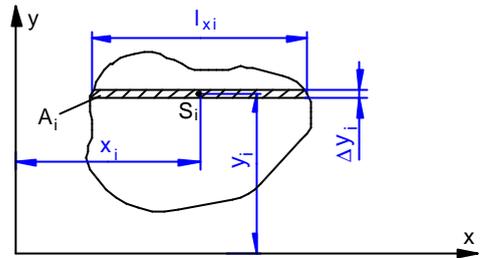
$$y_0 = \sum \frac{\Delta x_i \cdot I_{y_i}}{A} \cdot y_i$$



2. Möglichkeit

$$(68.2) \quad x_0 = \sum \frac{\Delta y_i \cdot I_{x_i}}{A} \cdot x_i$$

$$y_0 = \sum \frac{\Delta y_i \cdot I_{x_i}}{A} \cdot y_i$$



(69) Schwerpunkt eines Dreiecks:

Die 3 Seitenhalbierenden (Schwerlinien) eines Dreiecks, schneiden sich im Schwerpunkt der Dreiecksfläche. Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien und die Höhen im Verhältnis 2:1.

$$(69.2) \quad x_0 = 0 ; y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b} \quad \text{Kreisausschnitt, Kreissektor}$$

$$(69.3) \quad x_0 = 0 ; y_0 = \frac{s}{\pi} \cdot \frac{60^\circ}{\alpha^\circ}$$

$$(69.4) \quad x_0 = 0 ; y_0 = \frac{2r \cdot \sin \alpha}{3\alpha}$$

$$(69.5) \quad x_0 = 0 ; y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \quad \text{Halbkreisfläche}$$

(70) Kreisabschnitt:

Ist von einer Gesamtfläche ein Teil abgeschnitten, so ist das statische Moment der Restfläche gleich dem statischen Moment der Gesamtfläche, vermindert um das statische Moment der fehlenden Fläche.

$$(71.1) \quad y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} ; x_0 = 0$$

$$(71.2) \quad y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin \alpha} ; x_0 = 0$$

Schwerpunkte räumlicher Flächen

$$(73) \quad \vec{r}_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot \vec{r}_i \quad \vec{r} = \text{Richtungsvektor}$$

$$(73.1) \quad x_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot x_i \quad y_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot y_i \quad z_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot z_i$$

$$(73.2) \quad x_0 = 0 ; y_0 = 0 ; z_0 = h_1 + \frac{h}{2} \quad \text{Kugeloberfläche}$$

$$(73.3) \quad x_0 = 0 ; y_0 = 0 ; z_0 = \frac{r}{2} \quad \text{Halbkugeloberfläche}$$

$$(73.4) \quad x_0 = 0 ; y_0 = 0 ; z_0 = \frac{r}{2} \cdot (y + \cos \alpha) \quad \text{Kugelkappe}$$

### Schwerpunkte von Körpern

$$(74) \quad \bar{r}_0 = \sum \frac{V_i}{V} \cdot \bar{r}_i \quad \bar{r} = \text{Richtungsvektor}$$

$$(74.1) \quad x_0 = \sum \frac{V_i}{V} \cdot x_i \quad y_0 = \sum \frac{V_i}{V} \cdot y_i \quad z_0 = \sum \frac{V_i}{V} \cdot z_i$$

#### (74.2) Dreiseitige Pyramide

S ist Schwerpunkt eines Dreiecks, das parallel über dem Dreieck BCD (Grundfläche) liegt, im Abstand  $h/4$  von diesem, bzw. im Abstand  $3/4$  von A (Spitze) aus.

$$(74.3) \quad x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = \frac{h}{4} \quad \text{Kreiskegel}$$

$$(74.4) \quad x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = \frac{3}{8} \cdot r \cdot (1 + \cos \alpha) \quad \text{Kugelausschnitt}$$

$$(74.5) \quad x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = \frac{3}{8} \cdot r \quad \text{Halbkugel}$$

### Schwerpunktsbestimmung durch Messung

$$(75) \quad x_0 = \frac{B}{G} \cdot l$$

### 3.4 Bestimmung von Oberflächen und Volumen von Rotationskörpern

$$(80) \quad A = 2\pi \cdot y_0 \cdot l \quad \text{Rotationsfläche}$$

$$(80.1) \quad A = 2\pi \cdot \sum \Delta l_i \cdot y_i$$

$$(81) \quad A = 4\pi r^2 \quad \text{Kugeloberfläche}$$

$$(82) \quad A = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{Mantelfläche des Kreiskegels}$$

$$(83) \quad A = 4\pi r^2 \cdot R \quad \text{Torus (Donut)}$$

$$(84) \quad V = 2\pi \cdot y_0 \cdot A \quad \text{Volumen des Rotationskörper}$$

$$(85) \quad V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \text{Kugelvolumen}$$

$$(86) \quad V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot r^2 \quad \text{Kreiskegel}$$

$$(87) \quad V = 2\pi^2 \cdot R \cdot r^2 \quad \text{Torus}$$

## 4. Die Reibung

### 4.1 Haftreibung

(90)  $R = \mu_0 \cdot N$

(91)  $\mu_0 =$  Reibungskoeffizient der Ruhe

Reibungskraft (Coulomb'sches Gesetz)

#### Reibkegel

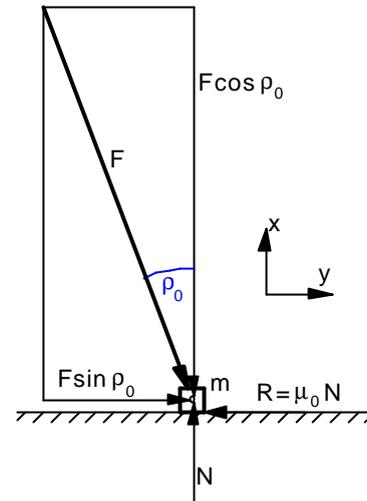
(92)  $\rho_0 = \arctan(\mu_0)$  Reibungswinkel

(93) Solange  $F$  innerhalb des Reibungskegels wirkt ( $\alpha \leq \rho_0$ )

bleibt der Körper in Ruhe und man spricht von Selbsthemmung (Selbstsperrung).

(94)  $H = F \cdot (\mu_0 \cdot \cos \alpha - \sin \alpha)$  Horizontalkraft

(94.1)  $H = F \cdot \frac{\sin(\rho_0 - \alpha)}{\cos \rho_0}$



#### Reibung auf schiefer Ebene

##### Hinaufschieben der Masse

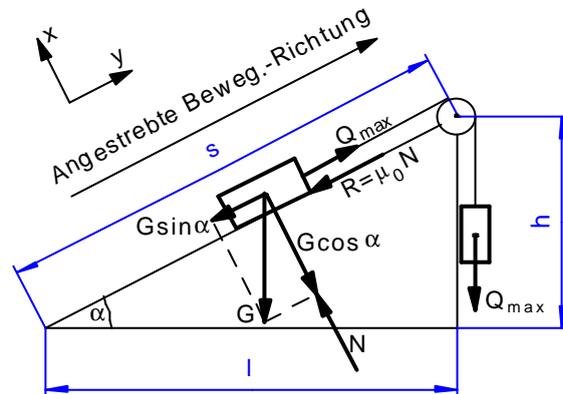
(95)  $Q_{\max} = G \cdot (\sin \alpha + \mu_0 \cdot \cos \alpha)$

(96)  $N = G \cdot \cos \alpha$  (Normalkraft)

(95.1)  $Q_{\max} = G \cdot \frac{h + \mu_0 \cdot l}{s}$

mit  $\mu_0 = \tan \rho_0$ :

(95.2)  $Q_{\max} = G \cdot \frac{\sin(\alpha + \rho_0)}{\cos \rho_0}$



##### Hinabschieben der Masse

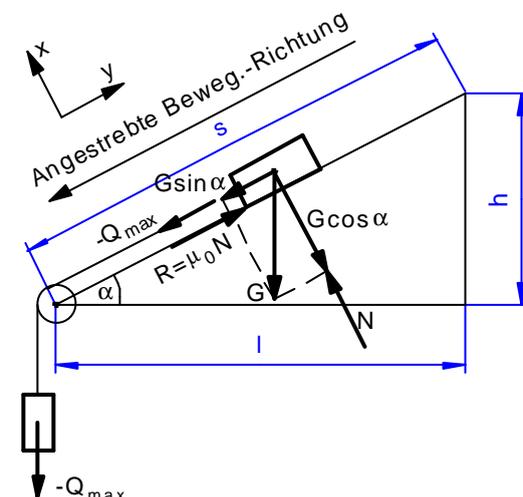
(97)  $Q_{\max} = G \cdot (\sin \alpha - \mu_0 \cdot \cos \alpha)$

(98)  $N = G \cdot \cos \alpha$  (Normalkraft)

(97.1)  $Q_{\max} = G \cdot \frac{h - \mu_0 \cdot l}{s}$

(97.2)  $Q_{\max} = G \cdot \frac{\sin(\alpha - \rho_0)}{\cos \rho_0}$

(99) Selbsthemmung für  $\alpha \leq \rho_0$



(100) Selbsthemmung für  $l \geq \frac{t}{2 \cdot \mu_0}$

Schraubzwinde

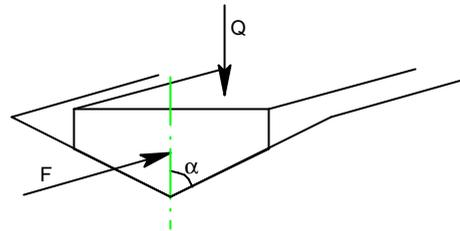
(101) Selbsthemmung für  $\alpha \leq \rho_0$

Schraube mit Flachgewinde

*Keilförmige Nut*

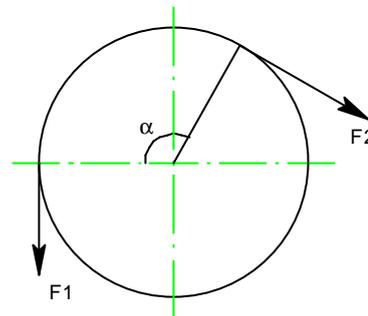
(102)  $N = Q \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha}$

(103)  $F = \frac{\mu_0 \cdot Q}{\sin \alpha}$



*Umschlingungsreibung*

(104)  $F_2 = F_1 \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}$



#### 4.2 Gleitreibung

(110)  $R = \mu \cdot N$

*Gleitreibung am Radiallager*

(111)  $\rho = \alpha$

(111.1)  $N = Q \cdot \cos \alpha$

(111.2)  $R = Q \cdot \sin \alpha$

(111.3)  $M_d = r \cdot Q \cdot \sin \alpha$

äusseres Moment

*Gleitreibung am Axiallager*

(112)  $M_R = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot Q \cdot r$

*Konstanter Druck auf Kreisringfläche*

(113)  $M_R = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot Q \cdot \frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2}$

Reibungsmoment

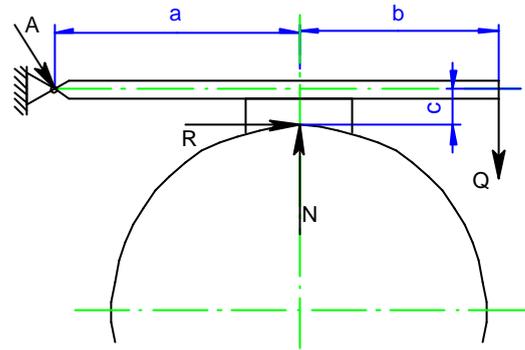
*Hyperbolische Druckverteilung auf Kreisringfläche*

(114)  $M_R = \mu \cdot Q \cdot \frac{r_a + r_i}{2}$

*Die Backenbremse*

$$(115.1) \quad N_1 = Q \cdot \frac{a+b}{a+\mu \cdot c}$$

$$(115.2) \quad N_2 = Q \cdot \frac{a+b}{a-\mu \cdot c}$$



*Reibung am Keil*

$$(116) \quad F = Q \cdot \frac{-\mu_1(\mu_2 \sin \alpha - \cos \alpha) + (\mu_2 \cos \alpha + \sin \alpha)}{-\mu_3(\sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha) + (\cos \alpha - \mu_2 \sin \alpha)}$$

(für eintreiben des Keils)

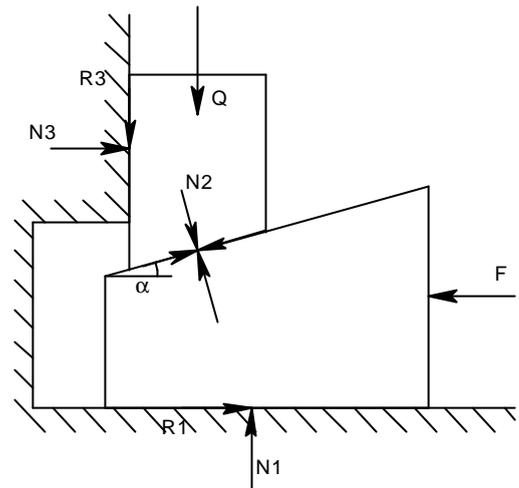
$$(117) \quad F = Q \cdot \frac{(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) + \mu_1(-\mu_2 \sin \alpha - \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu_2 \sin \alpha) + \mu_3(-\mu_2 \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

(für herausziehen des Keils)

Für  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$$(116.1) \quad F = Q \cdot \tan(\alpha + 2\mu) \quad (\text{eintreiben})$$

$$(117.1) \quad F = Q \cdot \tan(\alpha - 2\mu) \quad (\text{herausziehen})$$



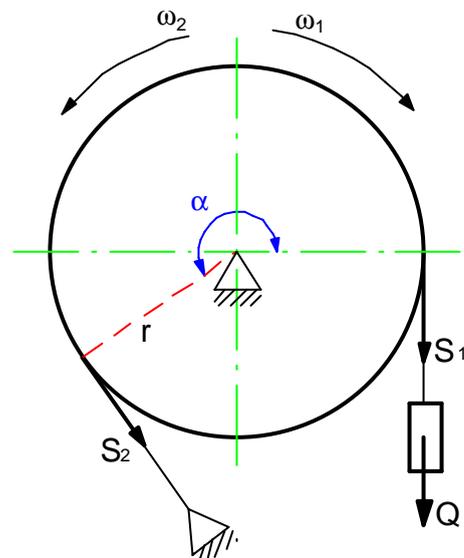
*Bandbremse*

Reibungsmoment rechtslauf:

$$(118) \quad M_{R1} = r \cdot Q \cdot (e^{\mu\alpha} - 1)$$

Reibungsmoment linkslauf:

$$(118.1) \quad M_{R2} = r \cdot Q \cdot (1 - e^{-\mu\alpha})$$



## 5. Normal- und Tangentialspannung

### 5.1 Zugspannung und Dehnung

Hooke'sches Gesetz, Spannung, Dehnung

$$(150) \quad \sigma = \frac{F}{A_0} \quad \text{Spannung}$$

$$(151) \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{Dehnung}$$

$$(152) \quad \varepsilon = \alpha \cdot \sigma \quad \text{mit } \alpha = \text{Dehnungszahl Dim: } \frac{\text{Fläche}}{\text{Kraft}} \quad \text{Hooke'sches Gesetz}$$

$$(152.1) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{mit } E = \text{Elastizitätsmodul} = \frac{1}{\alpha}$$

$$(152.2) \quad \varepsilon = \frac{\text{Endlänge} - \text{Anfangslänge}}{\text{Anfangslänge}} = \frac{l' - l_0}{l_0}$$

Vorzeichen der Dehnung:  
+ Verlängerung durch Zugkraft ist positiv.  
- Verkürzung durch Druckkraft ist negativ.

$$(153) \quad \Delta l = \frac{\sigma \cdot l_0}{E} \quad \text{Verlängerung}$$

$$(153.1) \quad \Delta l = \frac{F}{A_0} = \frac{l_0}{E}$$

$$(154) \quad E_{\text{Stahl}} = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Elastizitätsmodul für Stahl}$$

$$(154.1) \quad \sigma_{\text{Zul}} = \frac{K}{s} \quad \text{Zulässige Spannung}$$

mit  $K$  = Werkstoffkennwert und  $s$  = Sicherheitsfaktor

Querdehnung

$$(155) \quad \varepsilon_q = \eta = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{Querkontraktion}$$

$$(155.1) \quad \varepsilon_q = \frac{d_0 - d'}{d_0} \quad \text{Richtige Vorzeichen}$$

Verhältnis zwischen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_q$  über Proportionalität:

$$(156) \quad \varepsilon = m \cdot \varepsilon_q = \frac{1}{\nu} \cdot \varepsilon_q \quad \text{mit } m = \text{Poisson'sche Zahl und } \mu = \nu = \text{Querdehnungszahl}$$

$$(156.1) \quad \varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{Querkontraktion}$$

$$(156.2) \quad \varepsilon_q = \frac{\sigma}{m \cdot E}$$

$$(156.3) \quad m_{\text{Stahl}} = \frac{10}{3} \approx 3,33 \quad m_{\text{Stahl}} = \text{Poisson'sche Zahl für Stahl}$$

$$(156.4) \quad \mu = \nu = 0,3 = \frac{1}{m} \quad \mu = \nu = \text{Querdehnungszahl für Stahl}$$

### Dehnung der Querschnittsfläche

$$(157) \quad \varepsilon_A = 2 \frac{\Delta d}{d_0} = 2\varepsilon_q = 2\eta$$

### Volumendehnung

$$(158) \quad \varepsilon_V = \varepsilon \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{m-2}{m}$$

### Formänderungsarbeit bei Zugbeanspruchung

$$(159) \quad W^* = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l$$

Arbeit im elastischen Bereich

$$(160) \quad W^* = \frac{1}{2} \cdot V_0 \cdot \varepsilon \cdot \sigma = w \cdot V_0$$

$$(160.1) \quad \text{mit } w = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E}$$

Diese Arbeit  $W^*$  ist innerhalb des elastischen Bereiches geleistet und kann bei Entlastung wiedergewonnen werden. Man nennt  $W^*$  eine „innere Arbeit“.

### Wärmespannung

$\alpha$  = lineare Wärmeausdehnungszahl (bei Stahl:  $1,17 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$ )

$$(161) \quad \Delta l_T = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$$

Verlängerung durch Wärmedehnung

$$(162) \quad \Delta l_{\text{ges}} = l_0 \cdot \left[ \alpha \cdot (T_2 - T_1) + \frac{F}{A_0 \cdot E} \right]$$

Gesamtverlängerung

$$(162.1) \quad F = \left[ \frac{\Delta l_{\text{ges}}}{l_0} - \alpha \cdot (T_2 - T_1) \right] \cdot A_0 \cdot E$$

dazu nötige Kraft

$$(162.2) \quad \sigma = \frac{F}{A_0} = \left[ \frac{\Delta l_{\text{ges}}}{l_0} - \alpha \cdot (T_2 - T_1) \right] \cdot E$$

aufretende Spannung

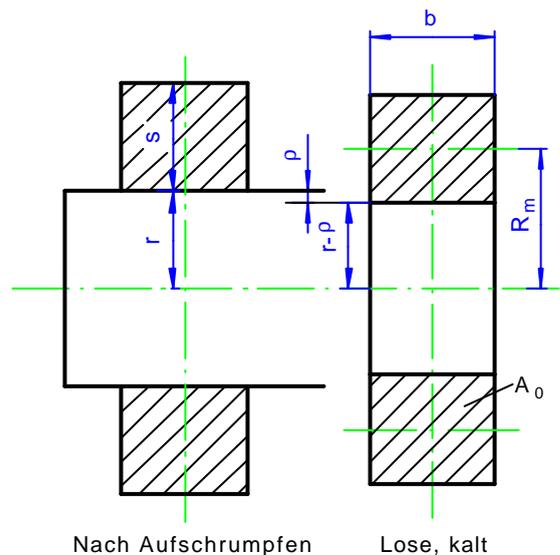
### Schrumpfspannung

(163) Temperaturdifferenz

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} = \frac{\rho}{r - \rho} \quad \text{mit } r = \text{Wellenradius}$$

(163.1) Gesamtreibmoment

$$M_R = 2\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \frac{\rho}{R_m} \cdot E \cdot A_0 \quad \text{für } s \ll R_m$$



## 5.2 Tangential- oder Schubspannungen

### Schubspannung

$$(164) \quad \tau = \frac{T}{A} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

Schubspannung

Satz der Gleichheit einander zugehöriger Schubspannungen:

$$(164.1) \quad |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$$

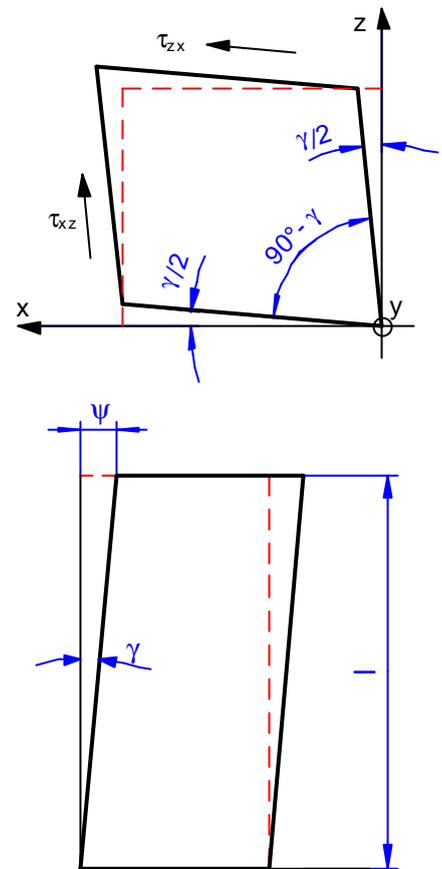
Definition der Indizes bei Schubspannungen:

1. Index: Bezeichnung der Achse, die zur Spannungsebene senkrecht verläuft.
2. Index: Bezeichnung der Achse, die zur Spannung  $\tau$  parallel verläuft.

### Gleitung, Gleitwinkel

$$(165) \quad \gamma = \beta \cdot \tau = \frac{1}{G} \cdot \tau \quad ; \quad G = \text{Gleitmodul}; \beta = \text{Gleitzahl}$$

$$(165.1) \quad \tau = \frac{\gamma}{\beta} = \gamma \cdot G$$



### Gesamtgleitung

$$(165.2) \quad \psi = \gamma \cdot l = \frac{\tau}{G} \cdot l = \frac{T}{A} \cdot \frac{l}{G}$$

### Gleitmodul für Stahl

$$(166) \quad G_{\text{Stahl}} = 8,1 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

### Zusammenhang zwischen Gleit- und Elastizitätsmodul

$$(167) \quad G = \frac{E \cdot m}{2(m+1)}$$

$$(167.1) \quad m = \frac{2G}{E - 2G}$$

Torsion einer Welle mit Kreisquerschnitt

(168)  $\varphi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{l}{r} = \frac{\gamma \cdot l}{r}$  Verdrehwinkel

Dünne Hohlwelle (mit Radius  $r$  und Wandstärke  $dr$ ;  $r \gg dr$ )

(169)  $M_t = 2\pi \cdot \tau_{x\varphi} \cdot \rho^2 \cdot dp$  Gesamt-Torsionsmoment

Dicke Hohlwelle oder Vollwelle (mit Radius  $r$  und Wandstärke  $dr$ )

(170)  $I_p = \frac{(d_a^4 - d_i^4) \cdot \pi}{32}$  Polares Flächenmoment 2. Grades

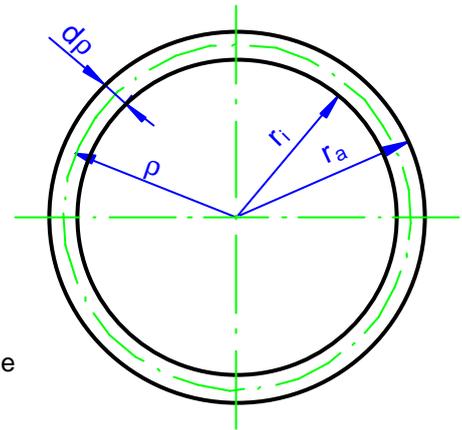
(171)  $\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$  Verdrehwinkel

(172)  $\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_p}$  Torsionsspannung

(173)  $\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot r_a}{I_p}$  Maximale Torsionsspannung

(174)  $I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$  Polares Trägheitsmoment für Vollwelle

(175)  $W_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$  Polares Widerstandsmoment nur für Vollwelle



(176)  $\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot r}{I_p} = \frac{M_t}{W_p}$  allgemein  
auch Hohlwelle nur Vollwelle

(177)  $W^* = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \varphi$  Formänderungsarbeit bei Torsion

(178)  $W^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \cdot V = w^* \cdot V$  ( $V = A \cdot l = \text{Volumen}$ )

(179)  $w^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G}$  spezielle Formänderungsarbeit

### 5.3 Spannungszustände

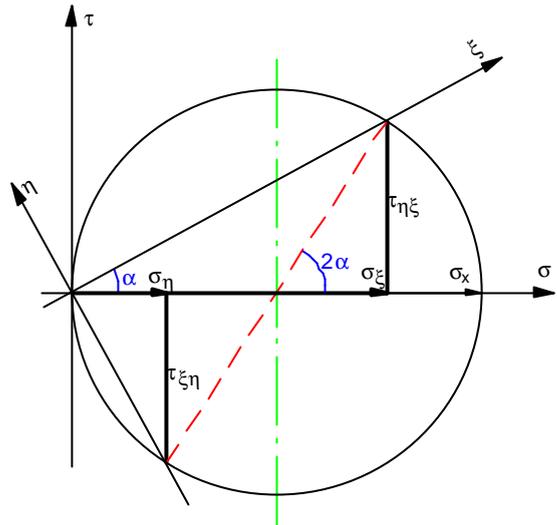
*Einachsiger oder geradliniger Spannungszustand*

$$(180) \quad \sigma_{\xi} = \sigma_x \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$(180.1) \quad \tau_{\xi\eta} = -\sigma_x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$(181) \quad \sigma_{\eta} = \sigma_x \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$(181.1) \quad \tau_{\eta\xi} = \sigma_x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}$$



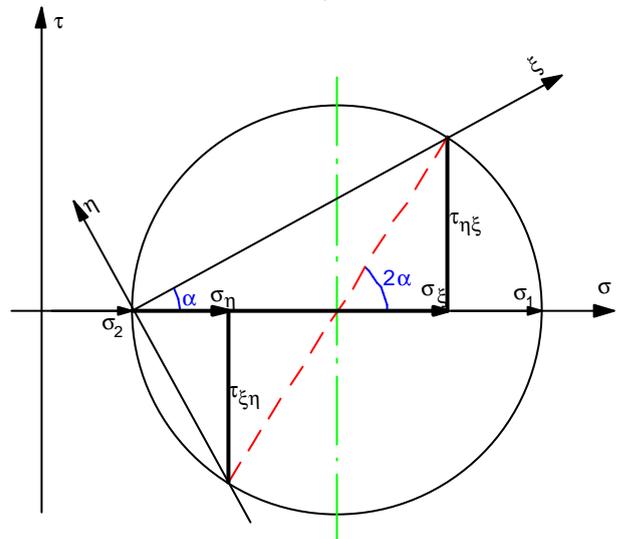
*Zweiachsiger oder ebener Spannungszustand*

$$(182) \quad \sigma_{\xi} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$(182.1) \quad \tau_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$(183) \quad \sigma_{\eta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

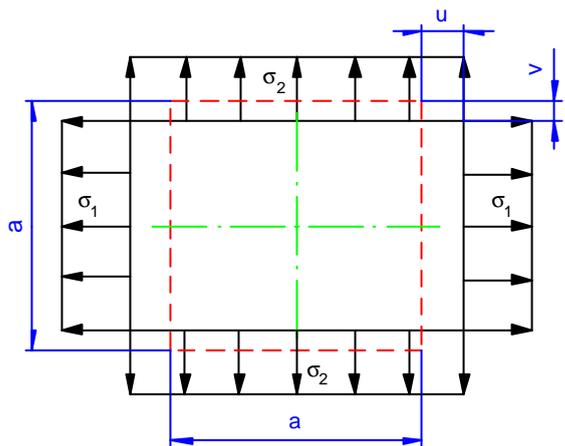
$$(183.1) \quad \tau_{\eta\xi} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$



*Die Dehnungen im 2-achsigen Spannungszustand*

$$(184) \quad \varepsilon_u = \frac{u_{\text{ges}}}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{E} \cdot \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m} \right)$$

$$\varepsilon_v = \frac{v_{\text{ges}}}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{E} \cdot \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m} \right)$$



*Umrechnen allgemeiner Spannungen*

$$(185) \quad \sigma_x = \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{2} + \frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{\xi\eta} \cdot \sin 2\alpha$$

$$(185.1) \quad \tau_{xy} = -\frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{\xi\eta} \cdot \cos 2\alpha$$

$$(186) \quad \sigma_y = \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{2} - \frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_{\xi\eta} \cdot \sin 2\alpha$$

$$(186.1) \quad \tau_{yx} = +\frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \cdot \sin 2\alpha - \tau_{\xi\eta} \cdot \cos 2\alpha$$

### Allgemeines Gesetz für die Zerlegung allgemeiner Spannungen

$$(187) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{\xi\xi} \cdot \cos x\xi \cdot \cos x\xi + \tau_{\xi\eta} \cdot \cos x\xi \cdot \cos x\eta + \tau_{\eta\xi} \cdot \cos x\eta \cdot \cos x\xi + \sigma_{\eta\eta} \cdot \cos x\eta \cdot \cos x\eta \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{\xi\xi} \cdot \cos y\xi \cdot \cos y\xi + \tau_{\xi\eta} \cdot \cos y\xi \cdot \cos y\eta + \tau_{\eta\xi} \cdot \cos y\eta \cdot \cos y\xi + \sigma_{\eta\eta} \cdot \cos y\eta \cdot \cos y\eta \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{\xi\xi} \cdot \cos x\xi \cdot \cos y\xi + \tau_{\xi\eta} \cdot \cos x\xi \cdot \cos y\eta + \tau_{\eta\xi} \cdot \cos x\eta \cdot \cos y\xi + \sigma_{\eta\eta} \cdot \cos x\eta \cdot \cos y\eta \end{aligned}$$

### Umrechnung auf Hauptspannungen

$$(188) \quad \tan 2\alpha^* = \frac{2\tau_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}$$

### Die Invarianten des ebenen Spannungszustandes

#### 1. Invariante

$$(189) \quad \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$(190) \quad \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = \left( \frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

#### 2. Invariante

$$(190.1) \quad \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} - \tau_{\xi\eta}^2 = \sigma_1 \sigma_2$$

### Die Verzerrungen im ebenen Spannungszustand

$$(191) \quad \gamma_{\xi\eta} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin 2\alpha$$

Änderung des rechten Winkels im Bogenmaß !

$$(191.1) \quad \gamma_{\xi\eta} = -\frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$(192) \quad 2\varepsilon_{\xi} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \cos 2\alpha$$

$$(192.1) \quad \gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_{\xi} = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} + \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$(193) \quad 2\varepsilon_{\eta} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \cos 2\alpha$$

$$(193.1) \quad \gamma_{\eta\eta} = 2\varepsilon_{\eta} = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} - \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

### Verzerrungskreis

die Größen ...

$$\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_{\xi}$$

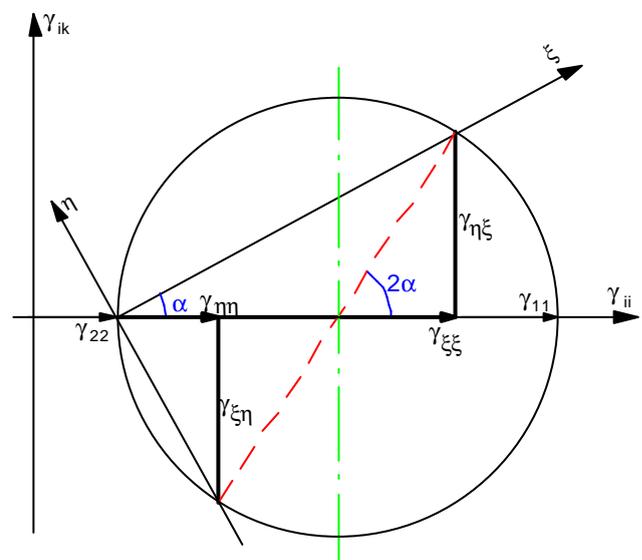
$$\gamma_{\eta\eta} = 2\varepsilon_{\eta}$$

$$\gamma_{11} = 2\varepsilon_1$$

$$\gamma_{22} = 2\varepsilon_2$$

... sind Dehnungen.

$\gamma_{\xi\eta}$  ist die Änderung des rechten Winkels im Bogenmaß.



### Die Invarianten der Verzerrungszustandes

$$(194) \quad \gamma_{\xi\xi} + \gamma_{\eta\eta} = \gamma_{xx} + \gamma_{yy} = \gamma_{11} + \gamma_{22}$$

$$\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta} = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$(194.1) \quad \gamma_{xx}\gamma_{yy} - \gamma_{xy}^2 = \gamma_{\xi\xi}\gamma_{\eta\eta} - \gamma_{\xi\eta}^2 = \gamma_{11}\gamma_{22}$$

### Allgemeine Umrechnungsformeln für Verzerrungen

geg:  $\gamma_{xx} = 2\varepsilon_x$ ;  $\gamma_{yy} = 2\varepsilon_y$ ;  $\gamma_{xy}$  (=Winkeländerung)

ges:  $\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_{\xi}$ ;  $\gamma_{\eta\eta} = 2\varepsilon_{\eta}$ ;  $\gamma_{\xi\eta}$

$$(195) \quad \gamma_{\xi\xi} = \frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2} + \frac{\gamma_{xx} - \gamma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\alpha + \gamma_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

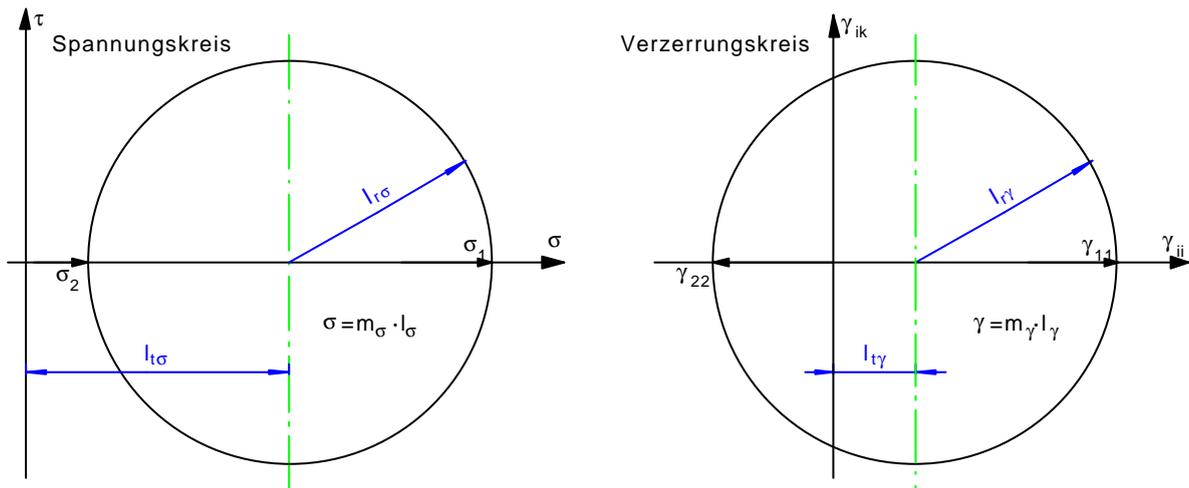
$$\gamma_{\eta\eta} = \frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2} - \frac{\gamma_{xx} - \gamma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\alpha - \gamma_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -\frac{\gamma_{xx} - \gamma_{yy}}{2} \cdot \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

### Ermittlung der Hauptverzerrungsrichtungen aus $g_x$ , $g_y$ und $g_{x45^\circ}$

$$(195.1) \quad \gamma_{xy} = \gamma_{\xi\xi 45^\circ} - \frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2}$$

### Zusammenhang zwischen Spannungskreis und Verzerrungskreis



$$(196) \quad \frac{l_{r\sigma}}{l_{r\gamma}} = \frac{E \cdot m}{2(m+1)} \cdot \frac{m_\gamma}{m_\sigma} = G \cdot \frac{m_\gamma}{m_\sigma}$$

$$(196.1) \quad \sigma_1 = \frac{E \cdot m}{m^2 - 1} \cdot (\varepsilon_1 \cdot m + \varepsilon_2)$$

$$(196.2) \quad \sigma_2 = \frac{E \cdot m}{m^2 - 1} \cdot (\varepsilon_2 \cdot m + \varepsilon_1)$$

$$(197) \quad \frac{l_{t\sigma}}{l_{t\gamma}} = \frac{E \cdot m}{2 \cdot (m-1)} \cdot \frac{m_\gamma}{m_\sigma} = G \cdot \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{m_\gamma}{m_\sigma} = \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{l_{r\gamma}}{l_{r\sigma}}$$

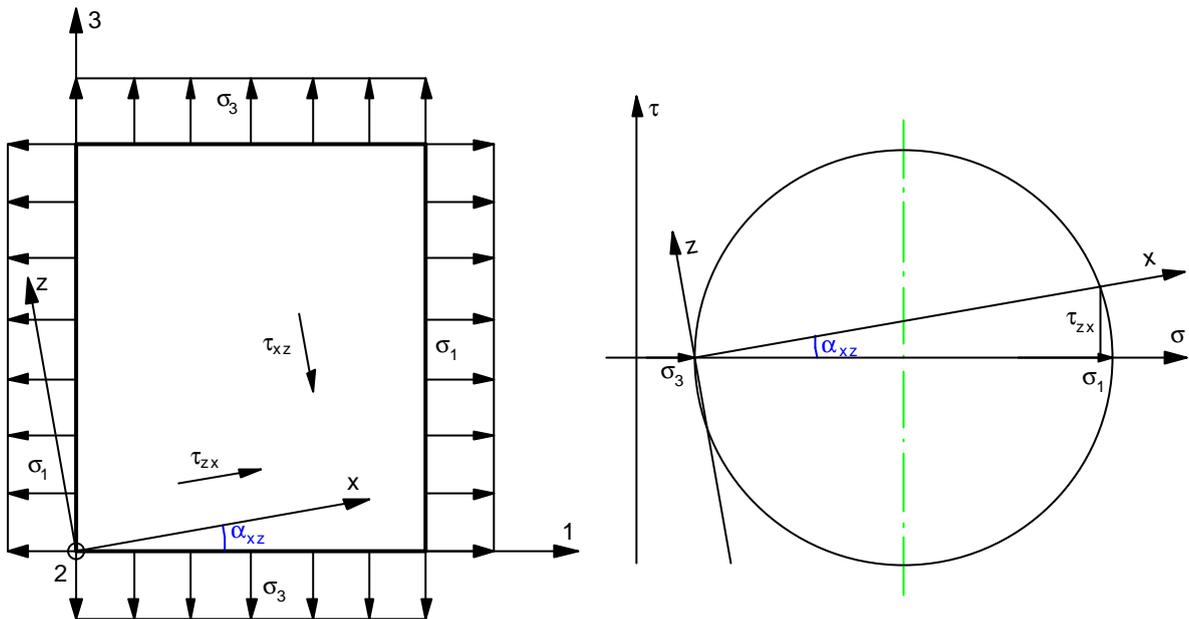
### Zylinderkessel mit dünner Wand ( $s$ = Wandstärke)

$$(198) \quad \sigma_l = \frac{R}{2 \cdot s} \cdot p_i \quad \text{Längsspannung}$$

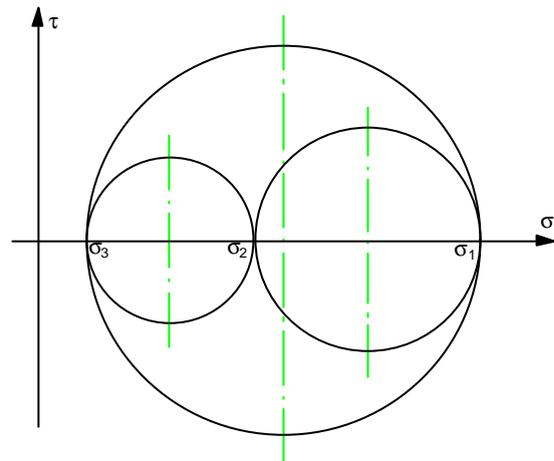
$$(198.1) \quad \sigma_\varphi = \frac{R}{s} \cdot p_i = 2 \cdot \sigma_l \quad \text{Tangentialspannung}$$

### Dreiachsiger Spannungszustand

Hier ist der Spannungszustand in der Ebene 1 – 3 dargestellt. Eine Drehung um die Achse 2 ergibt Schubspannungen  $\tau_{zx}$  bzw.  $\tau_{xz}$  im System  $x - z$ .



Man kann diese drei ebenen Spannungszustände in drei Spannungskreisen ausdrücken, die man ineinander zeichnen kann.



Wenn 2 der vorhandenen Spannungen Hauptspannungen sind, dann ist zwangsläufig die 3. Spannung auch eine Hauptspannung. Der ebene Spannungszustand ist nur ein Sonderfall des räumlichen, wobei eine Spannung = 0 ist.

### Hydrostatischer Spannungszustand

Ein hydrostatischer Spannungszustand liegt vor wenn  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Der Spannungskreis des 3-achsigen Spannungszustandes wird zum Punkt, es gibt also keinerlei Schubspannungen, daher auch keine Winkelverzerrungen.

### Verzerrungen im 3-achsigen Spannungszustand

$$(200) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$(201) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} - \frac{\sigma_z}{m} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left( \sigma_y - \frac{\sigma_z}{m} - \frac{\sigma_x}{m} \right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x}{m} - \frac{\sigma_y}{m} \right)$$

Dehnungen

Die einzelnen Werte  $\sigma$  können auch negativ sein, wenn es sich um Druckspannungen handelt.

$$(202) \quad e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Volumendilatation

$$(202.1) \quad e = \frac{m-2}{E \cdot m} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$(203) \quad \sigma_x = \frac{E \cdot m}{m+1} \cdot \left( \varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E \cdot m}{m+1} \cdot \left( \varepsilon_y + \frac{e}{m-2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E \cdot m}{m+1} \cdot \left( \varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right)$$

Die Spannungen als Funktion der Dehnungen

### Formänderungsarbeit durch Schubspannungen

$$(204) \quad W_{\tau}^*_{\text{gesamt}} = (w_1 + w_2 + w_3) \cdot V_0 = \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2 \cdot G} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

### Formänderungsarbeit durch Normalspannungen

$$(205) \quad W_{\sigma}^*_{\text{gesamt}} = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left( \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_x\sigma_z + 2\sigma_y\sigma_z}{m} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

### Spez. Gesamtformänderungsarbeit durch Spannungen ausgedrückt

$$(206) \quad w_{\sigma,\tau} = \frac{1}{E} \cdot \left[ \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2} - \frac{\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z}{m} + \frac{m+1}{m} \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]$$

$$(206.1) \quad w_{\sigma,\tau} = \frac{1}{E} \cdot \left[ \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{2} - \frac{m+1}{m} \cdot (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \frac{m+1}{m} \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]$$

### Spezielle Formänderungsarbeit durch Verzerrungen ausgedrückt

$$(206.2) \quad w_{\varepsilon,\gamma} = G \cdot \left[ e^2 \cdot \frac{m-1}{m-2} - 2 \cdot (\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z) + \frac{1}{2} \cdot (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right]$$

### Gestaltänderungsarbeit und Dehnungsarbeit

Die Formänderungsarbeit besteht aus Dehnungsarbeit (Volumenänderung) und Gestaltänderungsarbeit (Verzerrung).

$$(208) \quad w_{D\sigma} = \frac{\sigma'^2}{E} \cdot \frac{3(m-2)}{2m} \quad \text{Dehnungsarbeit}$$

$$(208.1) \quad w_{D\varepsilon} = G \cdot e^2 \cdot \frac{m+1}{3(m-2)}$$

$$(209.1) \quad w_{G\varepsilon} = -2G \cdot (\varepsilon_1' \varepsilon_2' + \varepsilon_1' \varepsilon_3' + \varepsilon_2' \varepsilon_3') \quad \text{Gestaltänderungsarbeit}$$

$$(209.2) \quad w_{G\varepsilon} = +\frac{G}{3} \cdot [(\varepsilon_1' - \varepsilon_2')^2 + (\varepsilon_1' - \varepsilon_3')^2 + (\varepsilon_2' - \varepsilon_3')^2]$$

$$(209.3) \quad w_{G\sigma} = \frac{1}{12G} \cdot [(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_1' - \sigma_3')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2]$$

$$w_{G\sigma} = \frac{m+1}{6 \cdot E \cdot m} \cdot [(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_1' - \sigma_3')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2]$$

### Überlagerung von Dehnungs- und Gestaltänderungsarbeit zur Formänderungsarbeit

$$(206.3) \quad \underbrace{w_{\varepsilon}}_{\text{Formänderungsarbeit}} = G \cdot \left[ \underbrace{e^2 \cdot \frac{m+1}{3(m-2)}}_{\text{Dehnungsarbeit}} + \underbrace{\{-2 \cdot (\varepsilon_1' \varepsilon_2' + \varepsilon_1' \varepsilon_3' + \varepsilon_2' \varepsilon_3')\}}_{\text{Gestaltänderungsarbeit}} \right]$$

$$(206.4) \quad w_{\varepsilon} = \frac{G}{3} \cdot \left[ e^2 \cdot \frac{m+1}{m-2} + \{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2\} \right]$$

$$(206.5) \quad w_{\sigma} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot m} \cdot \left[ (m-2) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + (m+1) \cdot \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\} \right]$$

### *Festigkeitshypothesen (Bruchhypothesen, Anstrengungshypothesen)*

$$\sigma_v = \text{Vergleichsspannung} \left( \sigma_v \leq \sigma_{zul} = \frac{R_e}{s} \right)$$

Theorie 1: Vergleich der größten Normalspannung (bei Versagen durch Trennbruch).

$$(210) \quad \sigma_v = \sigma_1$$

Theorie 2: Vergleich der größten Dehnung zwischen zwei Punkten.

$$(211) \quad \sigma_v = \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m} - \frac{\sigma_3}{m}$$

Theorie 3: Vergleich der größten Schubspannung (bei Versagen durch Gleitbruch).

$$(212) \quad \sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$$

Theorie 4: Vergleich der Formänderungsarbeit

$$(213) \quad \sigma_v = \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \frac{2 \cdot (m+1)}{m} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)} \quad \text{oder}$$
$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{3m} \cdot \left\{ (m-2)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + (m+1) \cdot \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] \right\}}$$

Theorie 5: Vergleich der Gestaltänderungsarbeit

$$(214) \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]}$$

### *Festigkeitshypothesen bei Wellen*

Theorie 1:

$$(210.1) \quad \sigma_{v(\sigma)} = \sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_w + \sqrt{\sigma_w^2} + \sqrt{\sigma_w^2 + 4\tau_w^2})$$

Theorie 2:

$$(211.1) \quad \sigma_{v(\epsilon)} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sigma_w \cdot \frac{m-1}{m} + \sqrt{\sigma_w^2 + 4\tau_w^2} \cdot \frac{m+1}{m} \right]$$

$$(211.2) \quad \sigma_{v(\epsilon)} = 0,35 \cdot \sigma_w + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma_w^2 + 4\tau_w^2}$$

Theorie 3:

$$(212.1) \quad \sigma_{v(\tau)} = \sqrt{\sigma_w^2 + 4\tau_w^2}$$

Theorie 4:

$$(213.1) \quad \sigma_{v(w)} = \sqrt{\sigma_w^2 + \frac{2(m+1)}{m} \cdot \tau_w^2}$$

$$(213.2) \quad \sigma_{v(w)} = \sqrt{\sigma_w^2 + 2,6 \cdot \tau_w^2}$$

Theorie 5:

$$(214.1) \quad \sigma_{v(G)} = \sqrt{\sigma_w^2 + 3\tau_w^2}$$

## 6. Allgemeine Biegung

### 6.1 Die Biegebeanspruchung

#### Allgemeines

Angreifende Belastungen an einem Balken können sein:

- Einzellasten  $F_i$ , A und B
- Streckenlasten  $q(x)$
- Freie Momente  $M_i$

$I_{\ddot{a}q}$  = äquatoriales Trägheitsmoment = Flächenträgheitsmoment = äq. Flächenmoment 2. Grades

$$(215.1) \quad \sum z^2 \cdot dA = \int z^2 \cdot dA = I_{\ddot{a}q} \quad \eta = \text{Abstand von neutraler Faser}$$

$$(215) \quad \sigma = \frac{M_b \cdot \eta}{I_{\ddot{a}q}}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_b \cdot \eta_{\max}}{I_{\ddot{a}q}} \quad \text{Biegespannung}$$

#### Errechnung von Flächenträgheitsmomenten

##### Rechtecksfläche

$$(216.1) \quad I_{\ddot{a}q} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{äquatoriales Trägheitsmoment}$$

$$(216.2) \quad W_{\ddot{a}q} = \frac{b \cdot h^2}{b} \quad (\text{nur für Vollquerschnitt}) \quad \text{äquatoriales Widerstandsmoment}$$

$$(216) \quad \sigma_{\max} = \frac{M_b \cdot \eta_{\max}}{\underbrace{I_{\ddot{a}q}}_{\substack{\text{auch} \\ \text{Hohlquerschnitt}}}} = \frac{M_b}{\underbrace{W_{\ddot{a}q}}_{\substack{\text{nur} \\ \text{Vollquerschnitt}}}}$$

##### Kreisquerschnitt

$$(217.1) \quad I_{\ddot{a}q} = \frac{d^4 \cdot \pi}{64} \quad \text{äquatoriales Trägheitsmoment}$$

$$(217.2) \quad W_b = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \quad (\text{nur für Vollquerschnitt}) \quad \text{äquatoriales Widerstandsmoment}$$

$$(217) \quad \sigma_{\max} = \frac{M_b \cdot \eta_{\max}}{\underbrace{I_{\ddot{a}q}}_{\substack{\text{auch} \\ \text{Hohlquerschnitt}}}} = \frac{M_b}{\underbrace{W_b}_{\substack{\text{nur} \\ \text{Vollquerschnitt}}}}$$

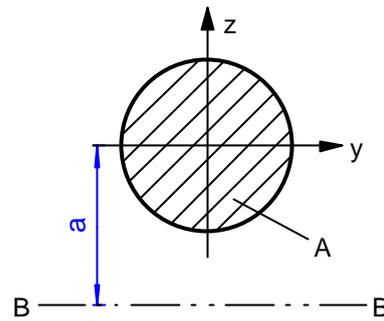
##### Hohler Kreisquerschnitt

$$(217.3) \quad I_{yy} = I_{zz} = \frac{d_a^4 - d_i^4}{64} \cdot \pi$$

$$(217.4) \quad \sigma_{\max} = \frac{M_b \cdot \eta_{\max}}{I_{\ddot{a}q}} = \frac{M_b \cdot \frac{d_a}{2}}{\frac{(d_a^4 - d_i^4) \cdot \pi}{64}}$$

### Umrechnung von Flächenträgheitsmomenten auf parallele Achsen (Steiner'scher Satz)

$$(218) \quad I_{BB} = I_{\text{äq}}^* = I_{\text{äqSchwerac}} + h_{se}^2 \cdot A$$



### Flächenträgheitsmomente zusammengesetzter Flächen

Flächenträgheitsmomente mit gleicher Bezugsachse dürfen addiert werden.

Das äquatoriale Trägheitsmoment eines fehlenden Flächenteils darf von dem  $I_{\text{äq}}$  der Gesamtfläche abgezogen werden, falls gleiche Bezugsachse vorliegt.

Widerstandsmomente dagegen, dürfen nicht addiert werden.

### Der Krümmungsradius

$$(219) \quad \frac{1}{\rho} = K = \frac{M_b}{E \cdot I_{\text{äq}}} \quad \rho = \text{Krümmungsradius, } K = \text{Krümmung}$$

## 6.2 Allgemeine Balkenbiegung

$$(220) \quad K = \frac{1}{\rho} = \frac{y'''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Krümmung

$$(221) \quad K = -y'''$$

$$(222) \quad Q(x) = \frac{d(-M(x))}{dx}$$

$$(223) \quad q(x) = \frac{dQ(x)}{dx}$$

### Allgemeine Biegeformeln

$$(224) \quad E \cdot I_{\text{äq}} \cdot y^{IV} = E \cdot I_{\text{äq}} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x)$$

$$(225) \quad E \cdot I_{\text{äq}} \cdot y''' = E \cdot I_{\text{äq}} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = Q(x)$$

$$(226) \quad E \cdot I_{\text{äq}} \cdot y'' = E \cdot I_{\text{äq}} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

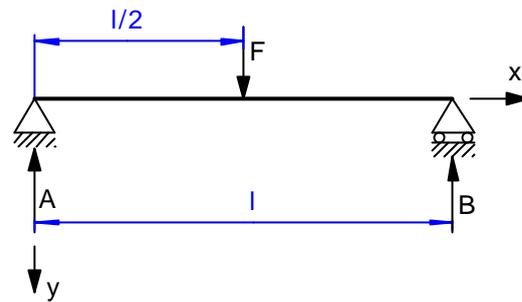
$$(227) \quad E \cdot I_{\text{äq}} \cdot y' = E \cdot I_{\text{äq}} \cdot \frac{dy}{dx} = -\int M(x) dx$$

$$(228) \quad E \cdot I_{\text{äq}} \cdot y = E \cdot I_{\text{äq}} \cdot y(x) = -\int \left( \int M(x) dx \right) dx$$

### Einzellast in der Mitte

Symmetrie:

$$A = B = \frac{F}{2}$$



$$(229) \quad y = \frac{F \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ -\frac{x^3}{l^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{l} \right]$$

Biegelinie

$$(229.1) \quad y' = \frac{F \cdot l^2}{4 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ -\frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{4} \right]$$

Neigung

$$(229.2) \quad y'(0) = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}}$$

Neigung bei  $x = 0$

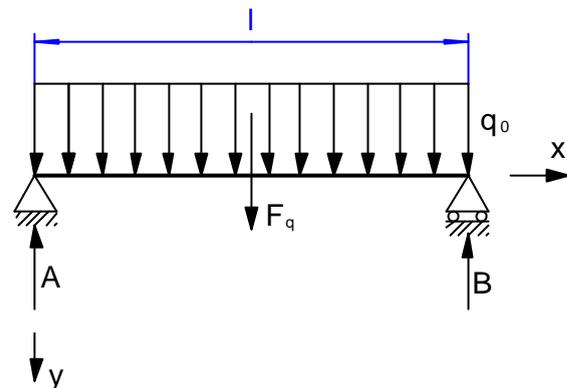
$$(229.3) \quad f = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}}$$

Maximale Durchbiegung

### Konstante Streckenlast $q_0$

Symmetrie:

$$A = B = \frac{q_0 \cdot l}{2}$$



$$(230) \quad y = \frac{q_0 \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ \frac{x^4}{l^4} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right]$$

Biegelinie

$$(230.1) \quad f = \frac{5}{16 \cdot 24} \cdot \frac{q_0 \cdot l^4}{E \cdot I_{\text{äq}}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_0 \cdot l^4}{E \cdot I_{\text{äq}}}$$

Maximale Durchbiegung

$$(230.2) \quad y' = \frac{q_0 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ \frac{x^3}{l^3} - \frac{3 \cdot x^2}{2 \cdot l^2} + \frac{1}{4} \right]$$

Neigung

$$(230.3) \quad y'(0) = \frac{q_0 \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \quad \text{wegen Symmetrie:} \quad y'(l) = -\frac{q_0 \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}}$$

Neigung

$$(230.4) \quad M(x) = \frac{q_0 \cdot l^2}{2} \cdot \left[ -\frac{x^2}{l^2} + \frac{x}{l} \right]$$

Biegemoment (wie 31.1)

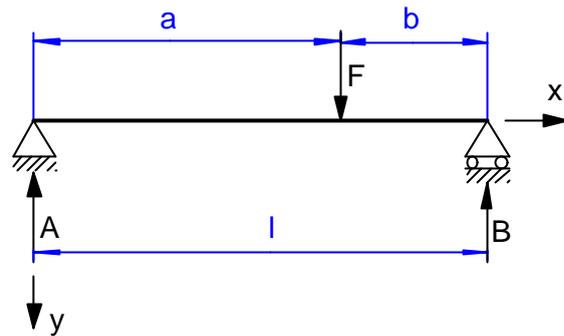
$$(230.5) \quad Q(x) = q_0 \cdot l \cdot \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right]$$

Querkraft (wie 31.2)

*Unsymmetrische Einzellast*

$$A = \frac{b}{l} \cdot F$$

$$B = \frac{a}{l} \cdot F$$



$$(231) \quad y = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ -\frac{b}{l} \cdot \frac{x^3}{l^3} + \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{l+b}{l} \cdot \frac{x}{l} + \frac{(x-a)^3}{l^3} \right] \quad \text{Biegelinie}$$

$$(231.1) \quad y' = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ -\frac{b}{l} \cdot \frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{l+b}{l} + \frac{(x-a)^2}{l^2} \right] \quad \text{Neigung}$$

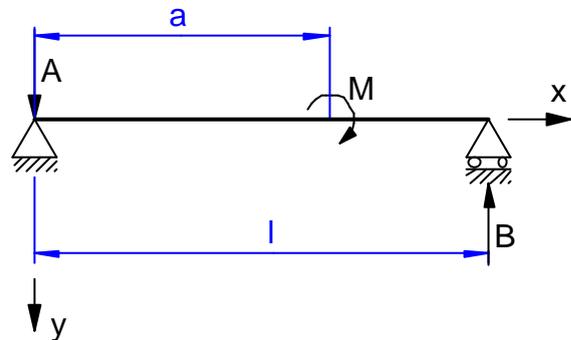
Sonderfall: mittige Einzellast

$$(231.2) \quad y' = \frac{F \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ -\frac{x^3}{l^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{l} + 2 \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right)^3 \right] \quad \text{wie (229)}$$

*Lastmoment bei  $x=a$*

$$A = -\frac{M}{l}$$

$$B = \frac{M}{l}$$



$$(232) \quad y = \frac{M \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \cdot \left( 2 - 6 \cdot \frac{a}{l} + 3 \cdot \frac{a^2}{l^2} \right) - 3 \cdot \left( \frac{x-a}{l} \right)^2 \right] \quad \text{Biegelinie}$$

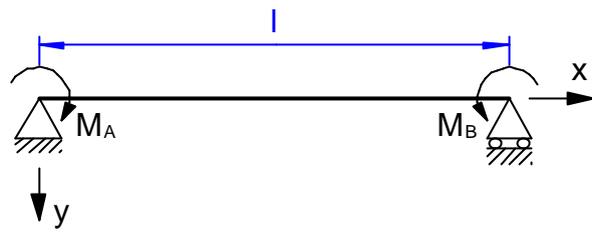
$$(232.1) \quad y' = \frac{M \cdot l}{2 \cdot E \cdot I_{\text{äq}}} \cdot \left[ \frac{x^2}{l^2} + \left( \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) - 2 \cdot \frac{x-a}{l} \right] \quad \text{Neigung}$$

Zwei gleiche entgegengesetzt gerichtete Momente an den Stabenden

$$|\bar{M}_A| = |\bar{M}_B|$$

$$A = 0$$

$$B = 0$$



(233)